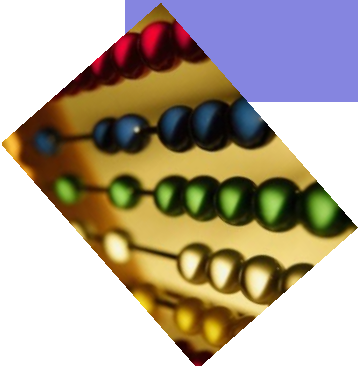


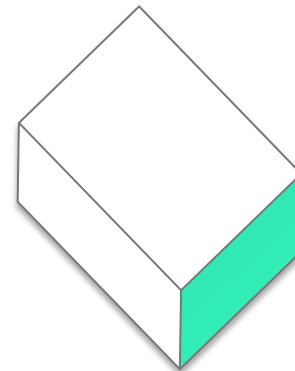


# *Enseigner la proportionnalité au cycle 3*



Groupe mathématiques départemental de  
Seine Maritime

VERSION  
13:00



**ETES-VOUS PRETS**

**?**



**3 objets identiques pèsent ensemble 7 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 30 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 60 de ces objets ?**



**7 objets identiques pèsent ensemble 5 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 21 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 420 de ces objets ?**



**10 objets identiques pèsent ensemble 42 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 5 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 15 de ces objets ?**



**10 objets identiques pèsent ensemble 45 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 2 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 3 de ces objets ?**



**7 objets identiques pèsent ensemble 28 kg.**

**CM1**

**Combien pèsent ensemble 2 de ces objets ?**

**CM2**

**Combien pèsent ensemble 9 de ces objets ?**



## Présentation du module de 9 heures

### Temps 1 :

- Introduction : calcul mental
- Résolution et analyse de deux problèmes de proportionnalité.
- *Apport théorique* : La proportionnalité une modélisation du réel, linéarité et théorie des proportions, champ conceptuel, définition(s)...
- Analyse de productions d'élèves.
- *Apport théorique* : Les relations entre les nombres.

### Temps 2 :

- Mise en œuvre dans les classes : Des problèmes pour enseigner la proportionnalité et ses modalités de résolution.
- Gestes professionnels : Se familiariser avec l'analyse des procédures utilisables par les élèves – Diversifier ces problèmes – Aller vers une progressivité.

### Temps 3 :

- Mutualisation et analyse des pratiques.
- La place du calcul mental – Un exemple dans une classe.
- *Apport théorique* : Vers une progression – Les erreurs récurrentes des élèves – Propositions d'activités de modélisation
- Conclusion : Les points d'attention pour bien enseigner la proportionnalité.



## TEMPS 1

Résolution de problèmes : analyse des procédures

La proportionnalité : une modélisation du réel

Deux types de procédures :

- ✓ La linéarité
- ✓ La théorie des proportions et le coefficient de proportionnalité

Autour de la proportionnalité : champ conceptuel

Définir la proportionnalité ?

Une variable didactique : les relations entre les nombres

L'énoncé et le choix de la situation

Les procédures observées chez les élèves

Vers le temps 2

**1/ Résoudre individuellement ces problèmes, en utilisant plusieurs procédures différentes, si c'est possible.**

**2/ Mettre en commun les procédures utilisées.**

**A/** Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

<b>Pour 15 crêpes</b>	<b>Pour 25 crêpes</b>
300 g de farine	500 g de farine
3 œufs	5 œufs
75 cL de lait	125 cL de lait
3 cuillères à soupe d'huile	5 cuillères à soupe d'huile

Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.

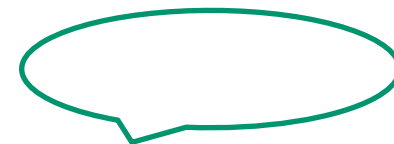
Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes ?

- Une entreprise fabrique des boulons. Avant de les mettre dans une boîte, une machine vérifie le bon nombre de boulons en les pesant.
- Pour un paquet de 10 boulons, la machine a été réglée pour vérifier que la masse est de 178 g.
- Une autre machine fait des paquets de 3 à partir des mêmes boulons.
- Quelle masse faut-il régler sur cette machine pour vérifier qu'il y ait bien 3 boulons ?

A/ Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

<b>Pour 15 crêpes</b> 300 g de farine 3 œufs 75 cL de lait 3 cuillères à soupe d'huile
-------------------------------------------------------------------------------------------------------

<b>Pour 25 crêpes</b> 500 g de farine 5 œufs 125 cL de lait 5 cuillères à soupe d'huile
--------------------------------------------------------------------------------------------------------



Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.  
Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes ?

Utilisation des rapports internes entre les nombres

### Procédure 1 de résolution

Constat: **10 crêpes = 25 crêpes - 15 crêpes**

[farine: 500-300, œufs 5-3...]

### Procédure 2 de résolution

Constat: **10, 15 et 25 sont des multiples de 5**

Recherche des proportions pour 5 crêpes

puis calcul du double pour 10 crêpes

[farine: (500:5)x2 ou (300:3)x2, œufs(5:5)x2 ou (3:3)x2...]

### Procédure 3 de résolution

Constat **25 crêpes + 15 crêpes = 40 crêpes**

Recherche des proportions pour 40 crêpes puis pour 10

[farine: (500+300):4, œufs 5+3):4...]

Pour 10 crêpes  
200g de farine  
3 œufs, 50 ml de  
lait, 2 cuillères  
à soupe d'huile

- Une entreprise fabrique des boulons. Avant de les mettre dans une boîte, une machine vérifie le bon nombre de boulons en les pesant.
- Pour un paquet de 10 boulons, la machine a été réglée pour vérifier que la masse est de 178 g.
- Une autre machine fait des paquets de 3 à partir des mêmes boulons.
- Quelle masse faut-il régler sur cette machine pour vérifier qu'il y ait bien 3 boulons ?

## Procédure 1 de résolution

Constat: le premier multiple entier commun de 10 et 3, c'est 30.

Recherche de la masse de 30 boulons  $178 \times 3 = 534$

Recherche de la masse de 3 boulons:  $534 : 10 = 53,4$

## Procédure 2 de résolution

Utilisation du  
retour à l'unité

Recherche de la masse d'un boulon  $178 : 10 = 17,8$

Calcul pour 3 boulons  $17,8 \times 3 = 53,4$

**Pour avoir 3 boulons dans une boîte, il faut régler la machine sur 53,4 g.**

**Tableau PE pour l'analyse des productions d'élèves**

<b>Problème</b>	<b>Procédures utilisées (à nommer et à décrire)</b>	<b>Réussites</b>	<b>Erreurs</b>	<b>Etayage à apporter pendant la séance</b>

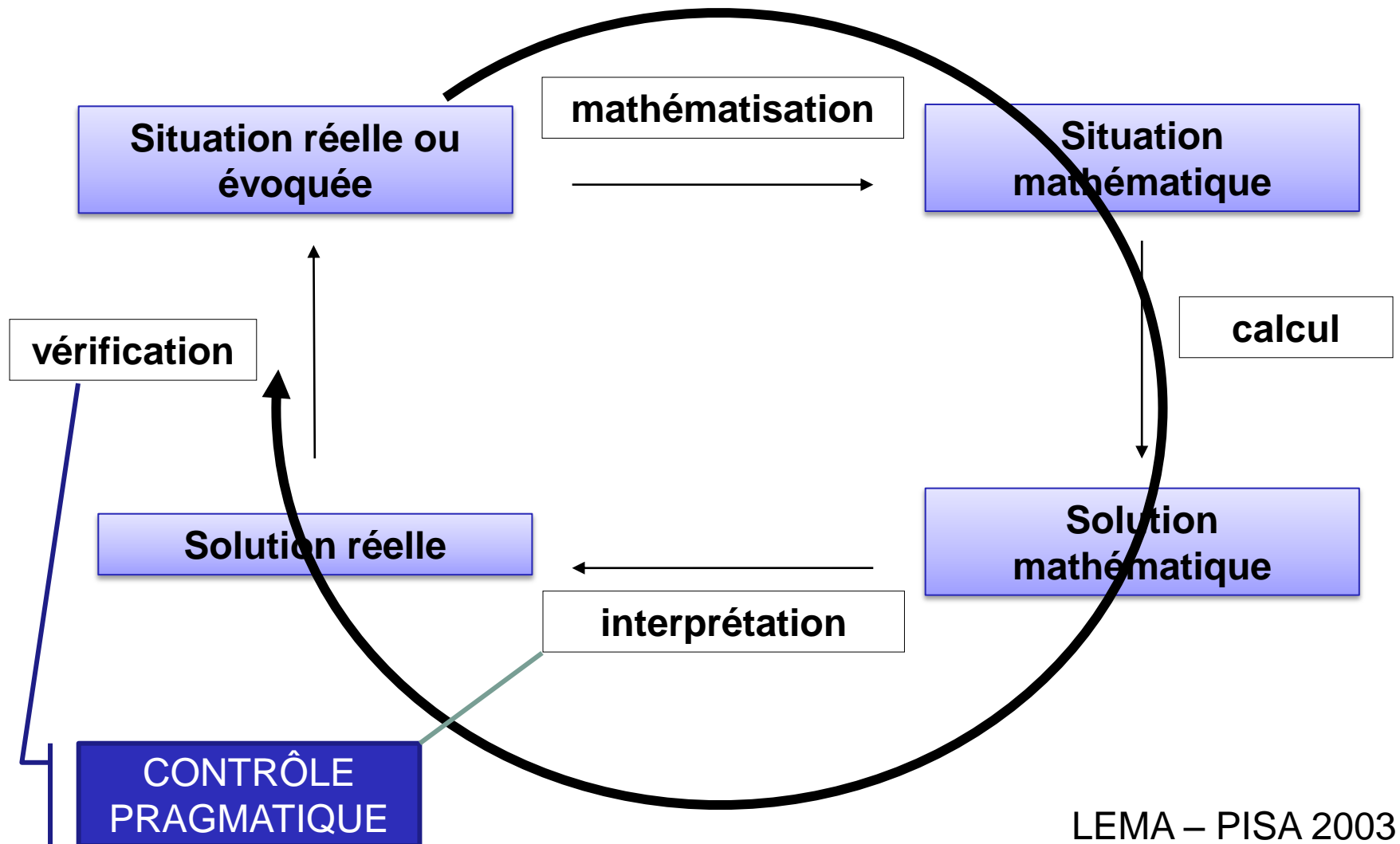
# ENSEIGNER LA PROPORTIONNALITÉ AU CYCLE 3

Les apports de la recherche : **Arnaud Simard**  
ESPE de l'Université de Franche-Comté  
COPIRELEM et LEARN-O

Grandeurs  
Problème  
Définition  
Annelle  
Linéarité  
Modéliser  
Réel

# Partie 1

# La proportionnalité : une modélisation du réel.





## **Modéliser**

- utiliser les mathématiques pour **résoudre** quelques **problèmes** issus de situations de la **vie quotidienne** ;
- **reconnaître et distinguer des problèmes relevant de** situations additives, multiplicatives, de **proportionnalité**;

.../...

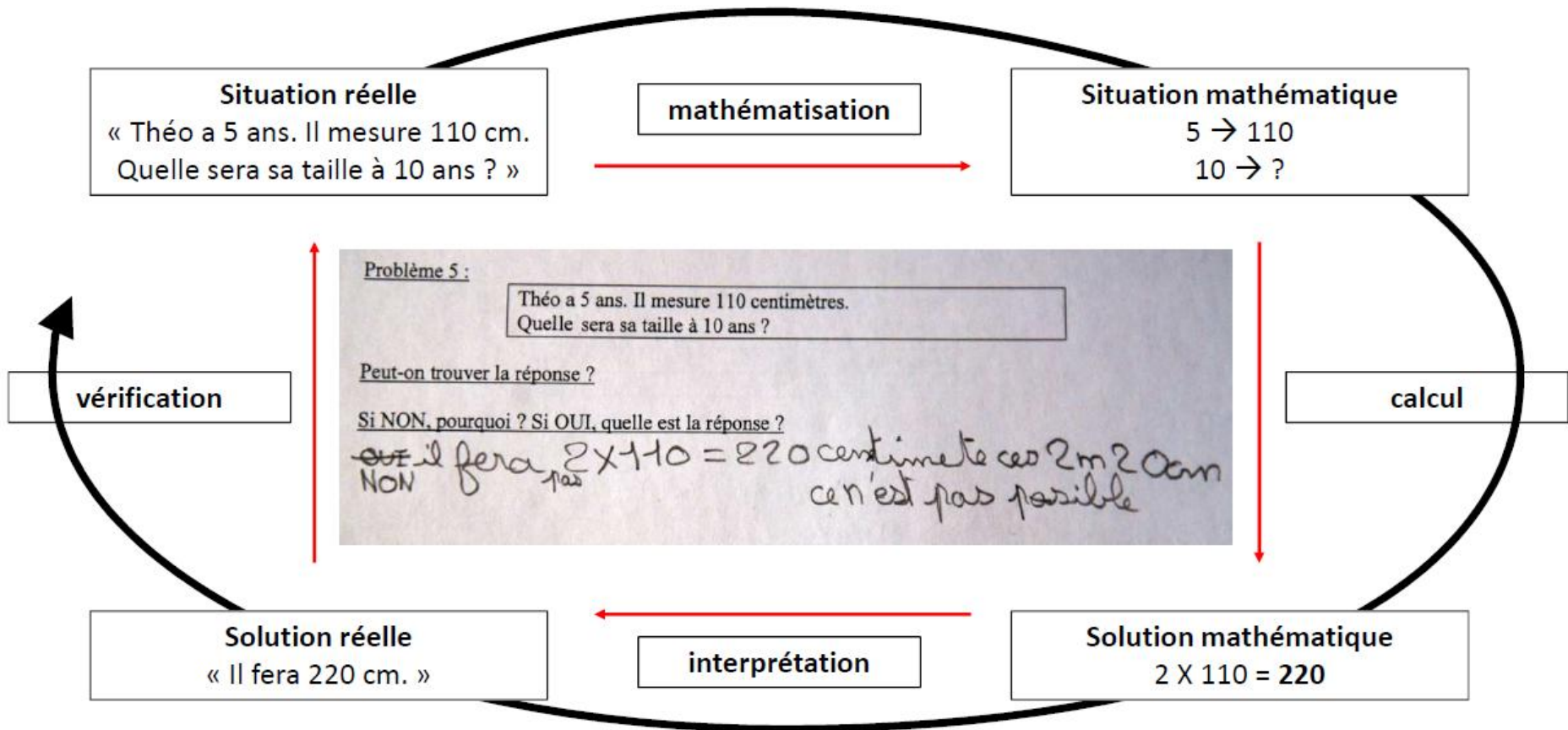
# Exemple de cycle de modélisation

Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.  
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?



# Exemple de cycle de modélisation

Problème 5 :

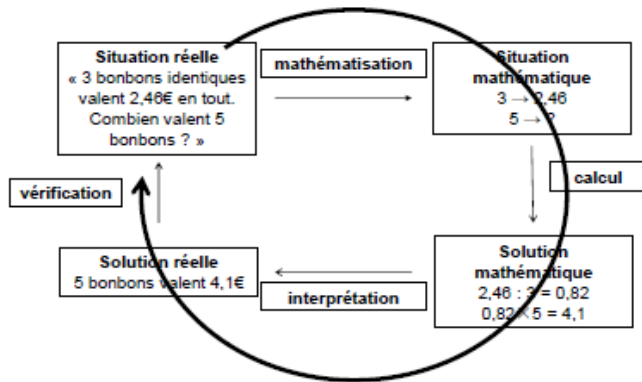
Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.  
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

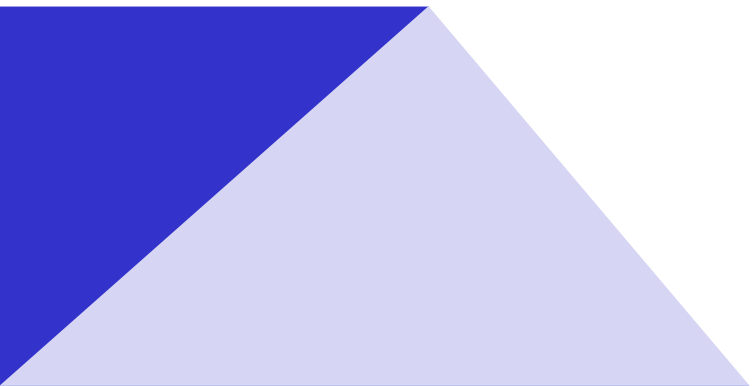
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

~~OUI~~ il fera  $2 \times 110 = 220$  centimètres ce qui est 2m20cm  
NON <sub>pas</sub> ce n'est pas possible

Contrôle pragmatique



*Deux grandes procédures associées à  
une situation de proportionnalité*



# La « linéarité »

Retour sur les crêpes ...

Dans l'énoncé, je peux mettre en avant les **correspondances** suivantes :

15 crêpes → 300 g de farine  
+  
25 crêpes → 500 g de farine  
-----  
40 crêpes → 800 g de farine

ou

25 crêpes → 500 g de farine  
-  
15 crêpes → 300 g de farine  
-----  
10 crêpes → 200 g de farine

La fonction  $F$  qui associe à un nombre de crêpes donné la quantité de farine nécessaire est **une fonction linéaire**.

Si on désigne par  $x$  le nombre de crêpes, on désigne la quantité de farine correspondante par  $F(x)$

On a la propriété suivante :

Pour tout nombres  $a$  et  $b$

$$F(a+b)=F(a)+F(b)$$

# La « linéarité »

Je peux aussi obtenir une nouvelle correspondance à partir d'une autre en multipliant les grandeurs par le même nombre.

10 crêpes → 200 g de farine

x 4     ↓                     ↓

40 crêpes → 800 g de farine

Avec les mêmes notations que précédemment, on a la propriété suivante :

Pour tout nombres  $a$  et  $\lambda$

$$F(\lambda a) = \lambda F(a)$$

# La linéarité

CYCLE 3 | MATHÉMATIQUES | proportionnalité

**Domaine « Nombres et calculs » 12 fois 25 ?**

*Procédure additive :*

« 10 fois 25 c'est 250 ; 2 fois 25 c'est 50  
donc 12 fois 25, c'est 250 plus 50 donc c'est 300 »

*Procédure multiplicative :*

« Je sais que 4 fois 25 c'est 100 et que 12 c'est 3 fois plus que 4  
donc  $12 \times 25$  c'est 3 fois plus que 100 donc c'est 300 »



# La linéarité

CYCLE 3 | MATHÉMATIQUES | proportionnalité

## Domaine « Grandeurs et mesures »

Je sais que 5 kg de pommes de terre coûtent 6,40 € et que 3 kg des mêmes pommes de terres coûtent 3,84 €.

Si je cherche le prix de 8 ou de 2 kg ... procédure additive

Si je cherche le prix de 9 ou de 25 kg ... procédure multiplicative

# Proportions et coefficient de proportionnalité

CYCLE 3 | MATHÉMATIQUES | proportionnalité

Dans ce cadre on étudie deux suites finies de nombres qui se correspondent un à un et l'accent est mis sur les **rappports égaux**. (quand ils sont définis)

Dans leur cours de 1920, Philippe et Dauchy définissent la proportionnalité de la manière suivante :

**« Deux suites de nombres qui se correspondent un à un sont proportionnelles lorsque les rapports de deux nombres correspondants sont égaux ».**

Exemple : Les suites (2 ; 6 ; 8) et (8 ; 24 ; 32) sont proportionnelles car :

$$2 \div 8 = 6 \div 24 = 8 \div 32$$


NB : Lien avec la notion de « ratio » introduite dans les programmes du cycle 4

# Proportions et coefficient de proportionnalité

CYCLE 3 | MATHÉMATIQUES | proportionnalité

Dans une situation de proportionnalité, le rapport commun entre les nombres qui se correspondent est appelé **coefficient de proportionnalité**.

PROPORTIONNALITE ET TABLEAU



Sachant que 5 L d'essence coûtent 7 €, on peut compléter le tableau :

Quantité d'essence (en L)	5	10	15	1,5
Prix (en €)	7	14	21	2,10

$\times 1,4$

1,4 est le COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITE

# Proportions et coefficient de proportionnalité

CYCLE 3 | MATHÉMATIQUES | proportionnalité

Retour sur les boulons ...

Dans l'énoncé, je peux mettre en avant les **correspondances** suivantes :

10 boulons  $\rightarrow$  178 g

donc

1 boulons  $\rightarrow$  17,8 g

(« dix fois moins ... »)

donc

3 boulons  $\rightarrow$   $3 \times 17,8 \text{ g} = 53,4 \text{ g}$

(« trois fois plus ... »)

Revenir à la masse d'un boulon revient, en acte, à déterminer le coefficient de proportionnalité de la fonction  $f$  qui à tout nombre de boulons donné associe sa masse en grammes.

C'est-à-dire  $f(1)=53,4$

# Proportions et coefficient de proportionnalité

CYCLE 3 | MATHÉMATIQUES | proportionnalité

Dans un tableau cela donnera :

Nombre de boulons	10	1	3
Masse (en g)	178	a	??

f est linéaire donc  $f(x)=a.x$  où a est le coefficient de proportionnalité.

**Bien sûr on ne connaît pas a ... mais on connaît  $f(10) = 178$**

**Comme  $f(10) = f(10 \times 1) = 10 \times f(1) = f(1) \times 10$  alors  $f(1) = a = f(10) / 10$**

J'ai payé 2,46€ pour 3 bonbons

Nombre de bonbons	1	3	15
Prix à payer	0,82	2,46	12,30

La **fonction linéaire**  $F$  associée à cette situation de proportionnalité est définie par

$$F(X) = 0,82 \times X$$

$$F(3) = 0,82 \times 3 = 2,46$$

$$F(15) = 0,82 \times 15 = 12,30$$

Le tableau de proportionnalité qui résume la situation est un tableau de valeurs de la fonction linéaire associée.

# NOTION MATH SOUS-JACENTE : fonction linéaire

CONTEXTE : Situation de proportionnalité

Si 3 bonbons valent 2,46 € alors 15 bonbons valent 12,30 €.

Le taxi roule à vitesse constante. S'il lui faut 3 minutes pour faire 2,46 km alors il lui faudra 15 minutes pour faire 12,30 km.

Si 3 cm sur la carte représentent 2,46 km dans la réalité alors 15 cm sur la carte représentent 12,30 km dans la réalité.

**fonction linéaire  $F$  sous jacente à ces situations définie par**

$$F(X) = 0,82 \times X$$

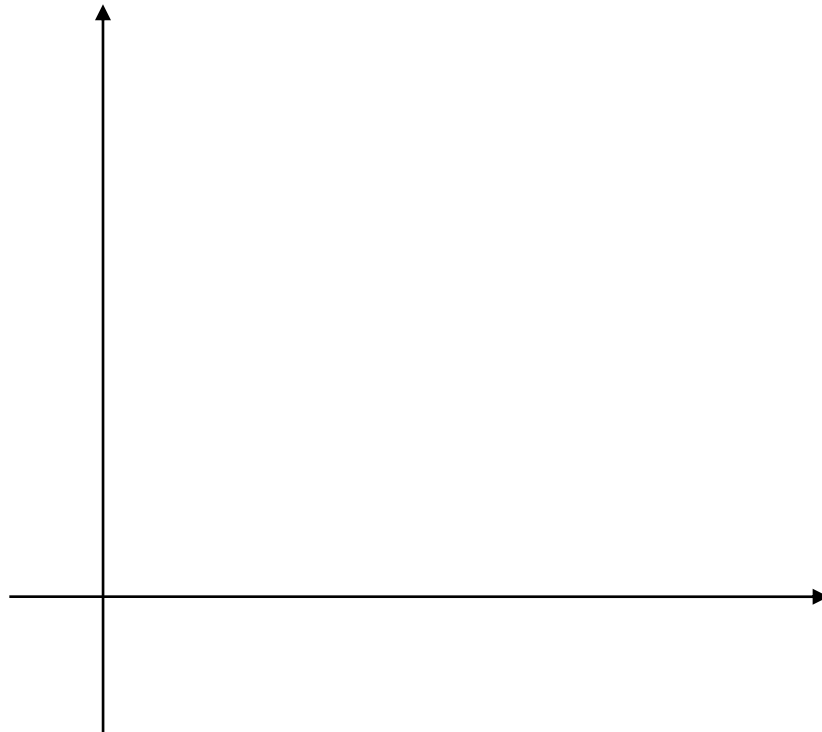
# Représentation graphique

Nombre de bonbons	3	15	1
Prix à payer	2,46	12,30	0,82



× 0,82

Prix (€)



Nombre de bonbons

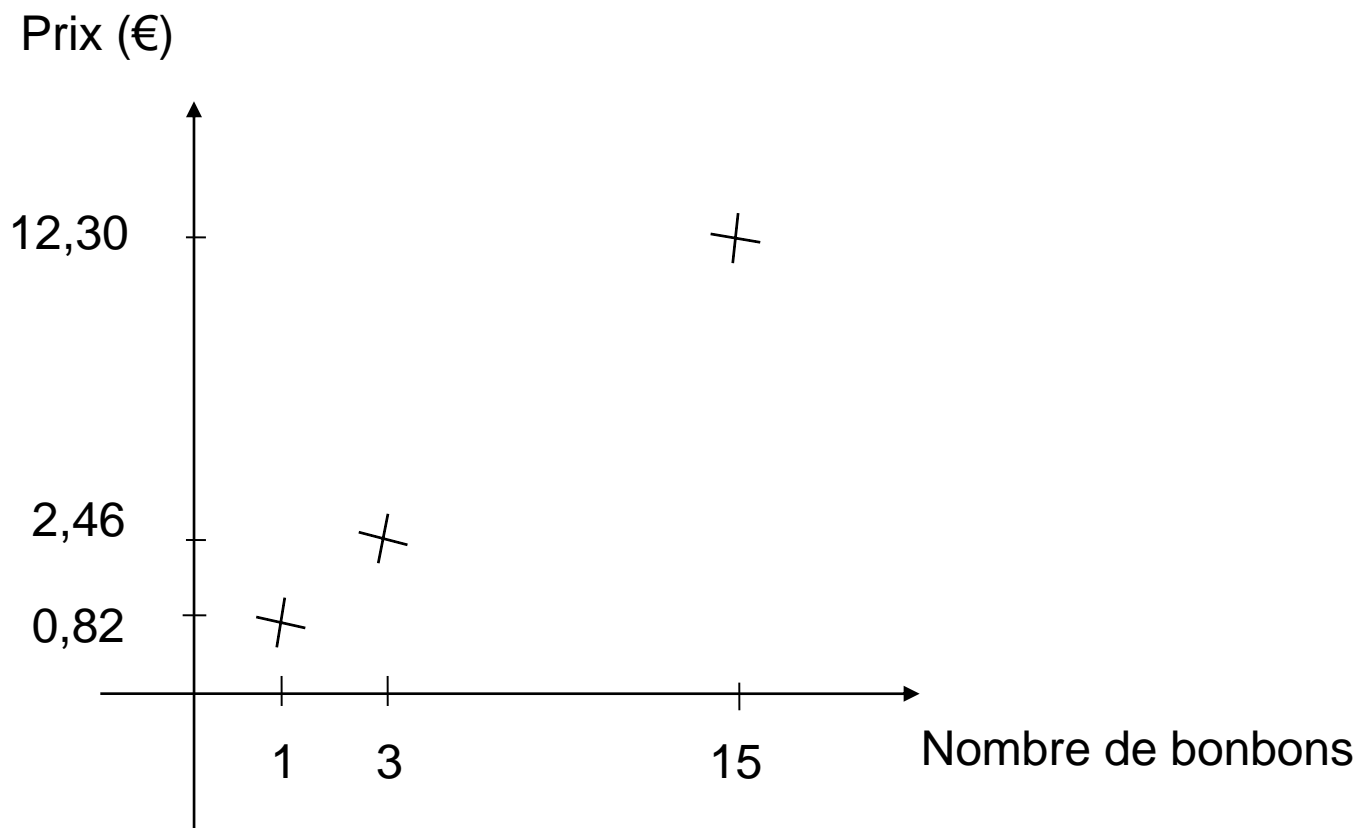


# Représentation graphique

Nombre de bonbons	3	15	1
Prix à payer	2,46	12,30	0,82



× 0,82

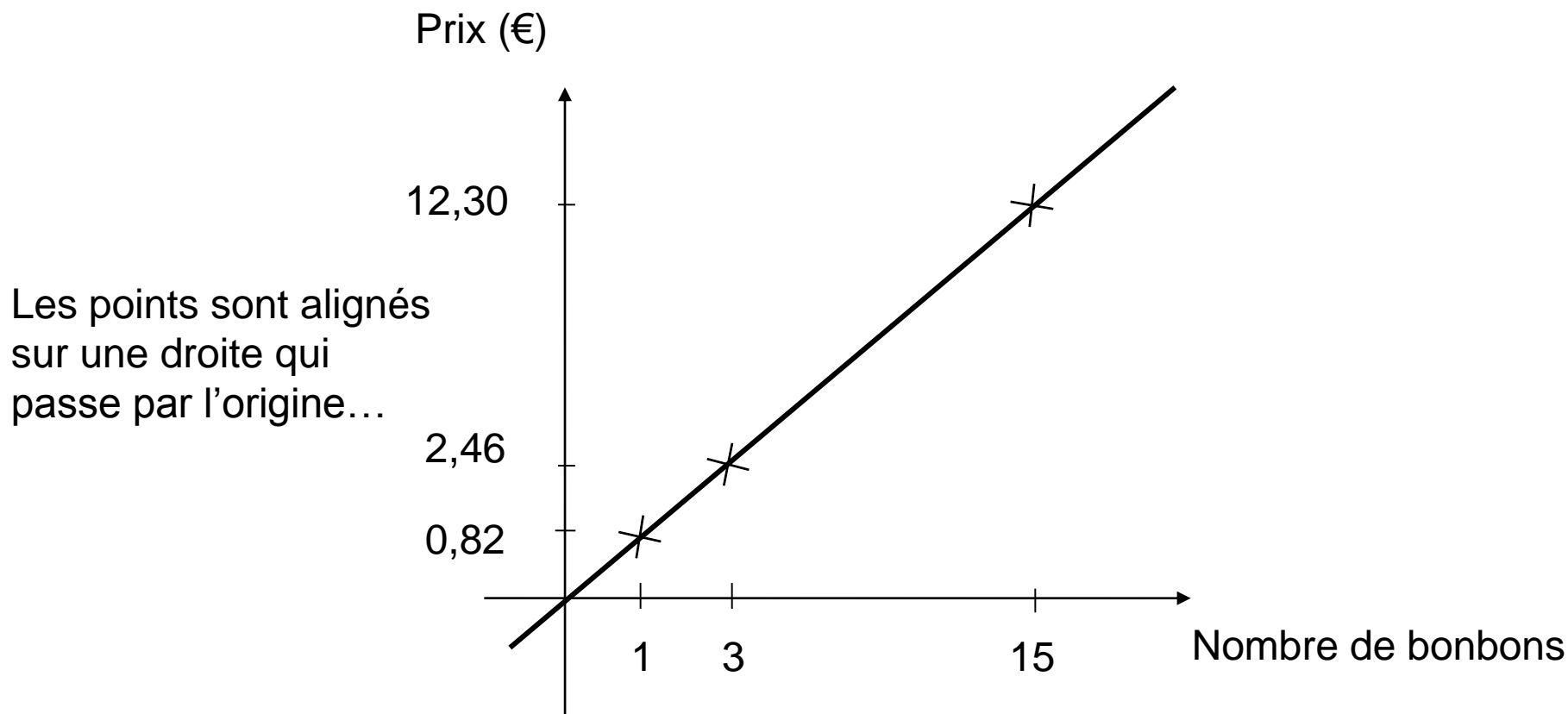


# Représentation graphique

Nombre de bonbons	3	15	1
Prix à payer	2,46	12,30	0,82



× 0,82



# Représentation graphique

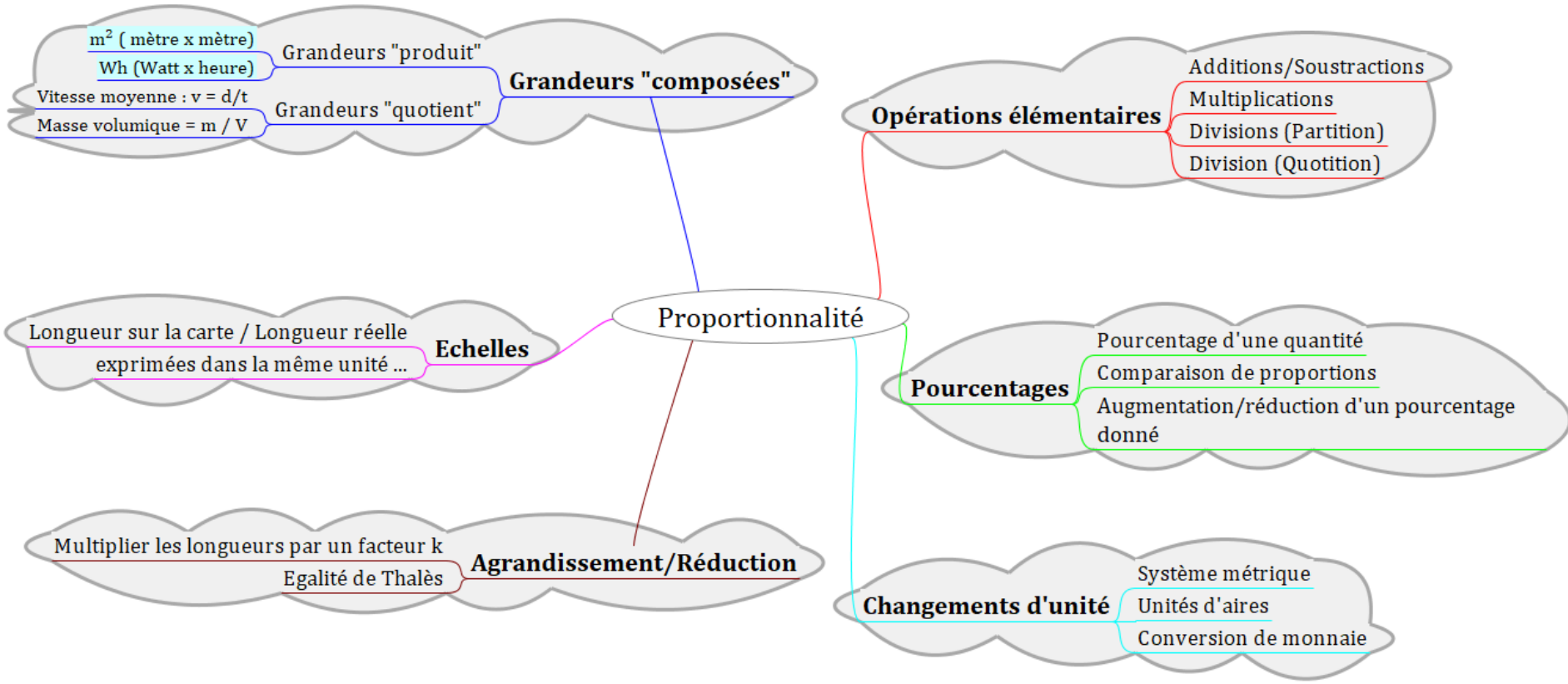
Toute situation de proportionnalité  
est associée à une fonction linéaire

or la représentation graphique d'une fonction linéaire est un  
**ensemble de point alignés avec l'origine du repère.**

En effet :  $F(X) = a \times X$  implique  $F(0)=0$ .

# « AUTOUR DE LA PROPORTIONNALITÉ »

Les différentes applications de la  
proportionnalité  
Son champ conceptuel



# 1- Multiplications et divisions

Attention à ne pas  
systématiser les tableaux

- La multiplication

Exemple  $7 \times 15$

Nombre de parts	1	7
valeur	15	?

« Un paquet contient 15 bonbons, combien de bonbons dans 7 paquets? »

# 1- Multiplications et divisions

- Les divisions

Exemple 15 : 9

Nombre de parts	1	9
valeur	?	15

(division – partition : recherche de la valeur d'une part)

« 9 tartelettes valent 15 euros, combien vaut **une** tartelette? »

# 1- Multiplications et divisions

- Les divisions

Exemple 15 : 9

Nombre de parts	?	1
valeur	15	9

(division – quotition : recherche du nombre de parts)

« 1 kg de figues vaut 9 euros, quelle masse de figues pour 15 euros ? »



## -2- Les changements d'unités

Attention :  $\text{cm}^2$ ,  $\text{dm}^2$ ,  $\text{m}^2$ ... $\text{cL}$ ,  $\text{dL}$ ,  $\text{L}$ ... relève plus de la numération décimale que de la proportionnalité (le coefficient de proportionnalité est 10, 100, 1000...) → lien avec les fractions décimales

Changements d'unités :

- le change de monnaies (euro / dollars...)
- le changement d'unités de mesures internationales

## -3- Taux de pourcentages

Un pourcentage est l'expression d'une proportion pour cent unités.

Systeme efficace pour comparer des proportions :

Dans la classe de Lisette il y a 27 élèves dont 13 filles.  
Dans celle d'Alban il y a 23 élèves dont 12 filles.

Dans quelle classe y a-t-il le plus de filles?  
(additif :  $13 > 12$ )

Dans quelle classe les filles sont-elles le plus représentées ?  
(multiplicatif : 48% contre 52%)

## 4- Vitesse constante

$$d = v \times t$$

dans cette expression, la vitesse «  $v$  » **constante** apparaît comme le coefficient de proportionnalité qui lie distance «  $d$  » et durée «  $t$  ».

Exemple : Un train roule à vitesse constante de 120km/h pendant 2h30, quelle distance a-t-il parcourue ?

120 km en une heure donc 60 km en une demi heure  
ainsi  $120 + 120 + 60 = 300$  km en deux heures et demie.

# 5- Les échelles

Il y a plusieurs types d'échelles sur les cartes et plans mais tous donnent une relation de proportionnalité entre les distances réelles et les distances représentées

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Distance sur le plan}}{\text{Distance réelle}}$$

Les distances  
sont exprimées  
dans la même  
unité!

Exemple :

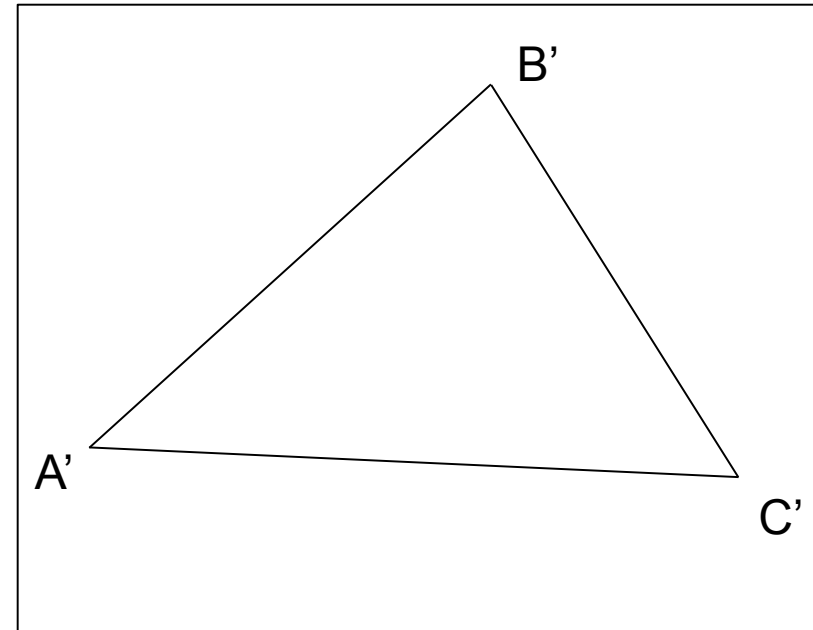
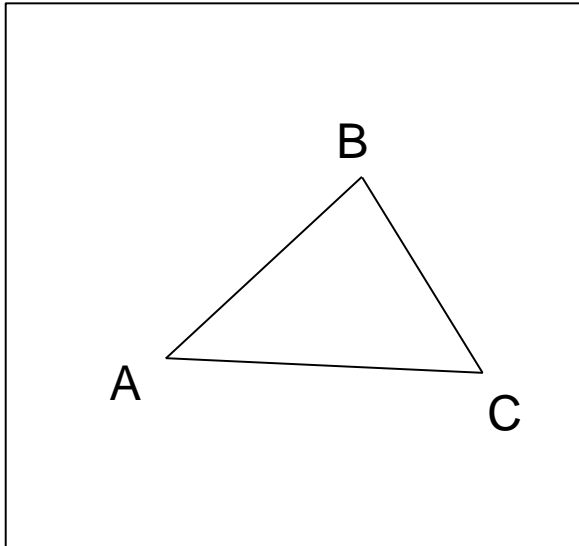
Une carte de randonnée IGN est à l'échelle  $\frac{1}{25000}$ . Cela signifie que 1 cm sur la carte correspond à 25000 cm dans la réalité.

Remarque :

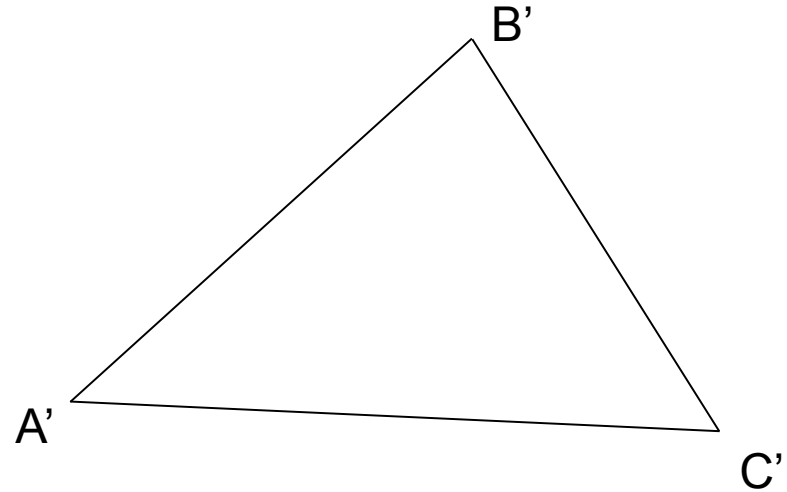
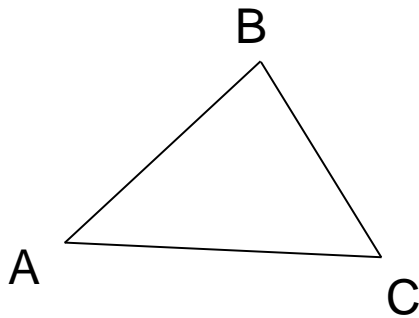
Attention l'échelle « un dixième » considère la fraction décimale sous son aspect opérateur (et pas division partage ou division quotient).

# 6- Proportionnalité en géométrie

Agrandissement – réduction



# 6- Proportionnalité en géométrie

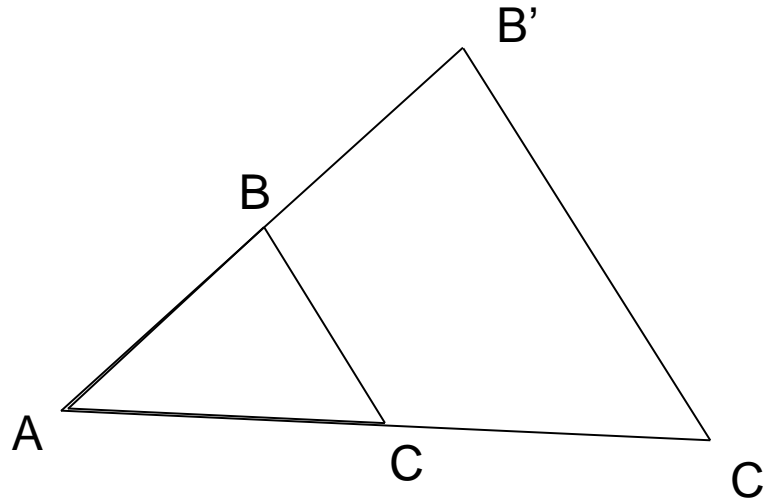


Les mesures des longueurs des côtés de ABC sont proportionnelles aux mesures des longueurs des côtés de A'B'C'.  
AB est à A'B' ce que AC est à A'C' et BC à B'C'.

AB		AC		BC
A'B'	=	A'C'	=	B'C'

# 6- Proportionnalité en géométrie

**THALES**



AB		AC		BC
AB'	=	AC'	=	B'C'

## La taille du peuplier

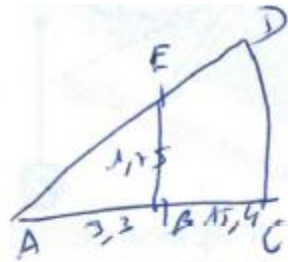
Jenny et Djamel veulent connaître la hauteur du peuplier du parc.  
Djamel s'est placé dos à l'arbre et a fait coïncider la limite de l'ombre de sa tête avec la limite de l'ombre du sommet de l'arbre.  
Jenny a mesuré alors les distances AB et BC.

La taille de Djamel est 1,75 m et Jenny a mesuré  $AB = 3,3$  m et  $BC = 15,4$  m.

- Faire un schéma modélisant cette situation.
- Calculer, au centimètre près, la hauteur DC de l'arbre.







$$AC = 3,3 + 15,4 \\ = 18,7 \text{ m.}$$

$$\left. \begin{array}{l} (BE) \perp (AC) \\ (DC) \perp (AC) \end{array} \right\} \text{ donc: } (BE) \parallel (DC)$$

les points A, E, D et A, B, C sont alignés  
 D'après le théorème de Thalès :

longueurs des côtés de ABE	AB = 3,3	AE	BE = 1,75
longueurs des côtés de ADC	AC = 18,8	AD	DC

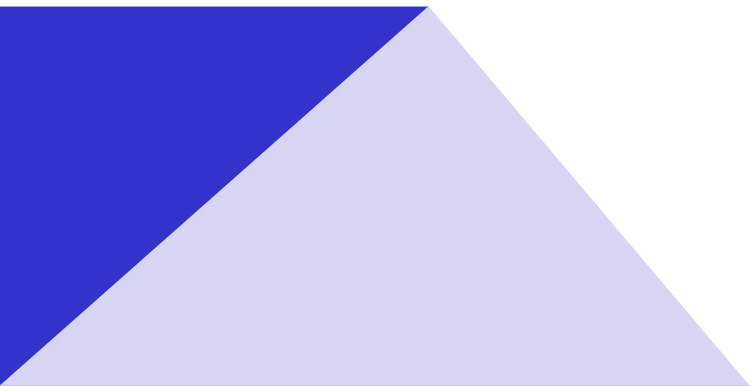
$$\text{Donc } \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BE} = \frac{AD}{AE}$$

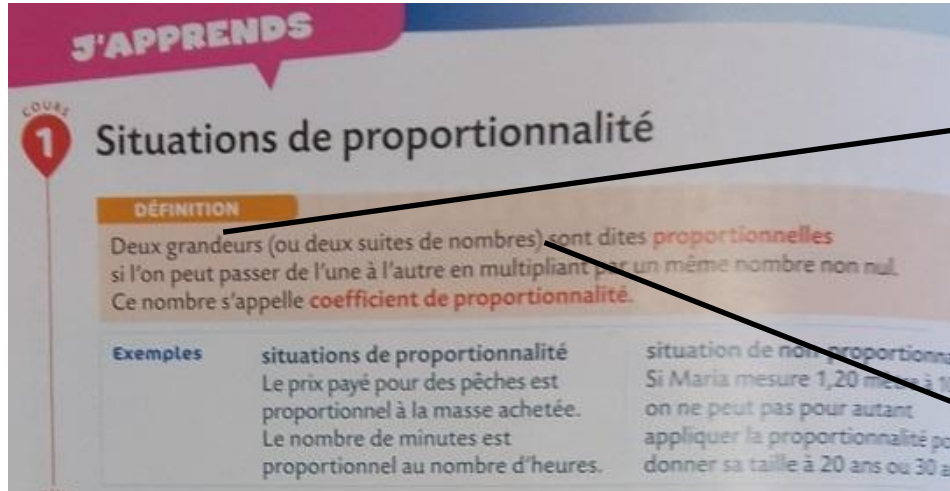
$$\frac{18,8}{3,3} = \frac{DC}{1,75}$$

$$DC = \frac{1,75 \times 18,8}{3,3}$$

$$\text{Donc } 9,92 \text{ m.}$$

Définir la proportionnalité ?





Définition en termes de grandeurs (mesurables)

Définition en termes algébriques

$$x \mapsto ax$$

Deux grandeurs (ou deux suites de nombres) sont dites **proportionnelles** si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un même nombre non nul.

Ce nombre s'appelle **coefficient de proportionnalité**.

Il existe une fonction linéaire ( $x \rightarrow ax$ ) qui à toute valeur de la première grandeur associe une valeur de la deuxième.

### Méthode 1

## Avec un tableau de proportionnalité

#### ÉNONCÉ

Compléter le tableau de proportionnalité.

2	4	6	
5			35

#### SOLUTION

	$\times 7$		
2	4	6	14
5	10	15	35
$5 \times 2$		$5 + 10$	

#### CONSEIL

On peut, si les valeurs s'y prêtent, utiliser les nombres déjà donnés :

- en additionnant ou soustrayant des colonnes
- en multipliant ou divisant les valeurs d'une colonne par un nombre choisi.

### Méthode 2

## Avec un coefficient de proportionnalité

#### ÉNONCÉ

Compléter le tableau de proportionnalité.

5	3	9	23	31
3				

#### SOLUTION

Le coefficient de proportionnalité vaut  $0,6$  car  $3 : 5 = 0,6$ . On applique ensuite ce coefficient. Par exemple  $9 \times 0,6 = 5,4$ .

5	3	9	23	31
3	1,8	5,4	13,8	18,6

#### CONSEIL

Quand plusieurs valeurs sont à trouver, on peut calculer puis utiliser le coefficient de proportionnalité. Ce coefficient s'obtient en faisant un retour à l'unité.

### Méthode 3

## Avec l'égalité des « produits en croix »

#### ÉNONCÉ

Compléter le tableau de proportionnalité.

6	210
7	

#### SOLUTION

D'après l'égalité des « produits en croix » :

$$7 \times 210 = 6 \times a$$

$$\text{d'où } a = \frac{7 \times 210}{6} = 245$$

6	210
7	a

#### CONSEIL

Quand les méthodes précédentes sont inadaptées et qu'il y a peu de valeurs à trouver, on peut effectuer les « produits en croix ».

### Avec la

#### Méthode 1

1 Reproduire et compléter le tableau de proportionnalité.

24	10	14	...	4	...
60	25	...	85	...	65

2 Reproduire et compléter le tableau de proportionnalité.

2	3	5	...	8	10
3	4,5	...	75	...	...

3 Une voiture consomme 9,6 L de carburant tous les 200 km.

Calculer la consommation pour :

- a. 400 km    b. 600 km    c. 1 200 km

4 Dans une recette de cuisine prévue pour 4 personnes, il faut 150 g de farine.

Aider Emma à calculer la quantité de farine nécessaire pour :

- a. 2 personnes    b. 6 personnes    c. 14 personnes

### Avec la

#### Méthode 2

5 Reproduire et compléter le tableau de proportionnalité en utilisant le coefficient indiqué.

4	5	7	...	$\times 1,5$
6	...	...	21	...

6 Reproduire et compléter le tableau de proportionnalité en utilisant un coefficient.

3	5	7	...	$\times \dots$
9	...	...	33	...

7 On désire agrandir les côtés d'un polygone. Reproduire et compléter le tableau de proportionnalité.

Longueur initiale	5	7	6,5	8
Longueur finale	7	...	...	...

8 Reproduire et compléter le tableau de proportionnalité en utilisant un coefficient.

2	5	9	...	...
2,2	...	...	27,5	41,8

### Avec la

#### Méthode 3

9 Le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

Laquelle de ces égalités peut-on écrire ?

a.  $5 \times a = 2 \times 1,7$

b.  $2 \times a = 5 \times 1,7$

c.  $5 \times 2 = 1,7 \times a$

2	1,7
5	a

10 Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité ?

3	4,5
11	16

12 Reproduire et compléter les trois tableaux de proportionnalité.

7	9	6	7	2,3	4
3	2	8	7	7	7

13 Quatorze pommiers produisent annuellement 770 kg de pommes.

Quelle serait la production, en kg, de quatre pommiers ?

14 Trois chaînes de montage produisent cent deux véhicules en une journée.

Combien de véhicules quatre chaînes produiraient-elles en une journée ?

Maths Monde cycle 4

Les Professeurs des écoles actuels ont ces conceptions de la proportionnalité en tête !

Une figure agrandie  
conserve la même forme.  
Pour agrandir une figure,  
il faut multiplier toutes  
les longueurs par  
un même nombre.

### **Critères en cycle 3**

(forcément lacunaire et contextualisée)

Deux grandeurs sont dites proportionnelles lorsque le rapport de leurs mesures est toujours le même.

Deux grandeurs sont dites proportionnelles lorsqu'elles varient dans les mêmes proportions.

# Attention

**Le sens** de la proportionnalité (liaison multiplicative entre des grandeurs) ne doit pas se perdre au profit **d'une représentation** (tableau ou représentation graphique) et **d'une « technique »** (calcul sur les lignes et les colonnes).\*

Pour parler de proportionnalité **avec des élèves** (cycle 3 et 4) il est important de **ne pas systématiser la représentation sous forme de tableau** de nombres.

Pour parler de proportionnalité avec **des personnes initiées** (étudiants, enseignants...) et lorsque les implicites sont levés, nous pouvons nous permettre de résumer les situations sous forme de tableau.

# Partie 2

Externe  
Nombres

Procédure

Calcul

Div



# Une variable didactique : les relations entre les nombres



# Les relations entre les nombres

**Le rapport interne** (rapport scalaire) est le rapport qu'il y a entre les nombres, les mesures d'une même grandeur, dans la même unité.

**Le rapport externe** (opérateur) est le rapport dans un couple de données se correspondant, **c'est le coefficient de proportionnalité.**

Sachant que **4 bonbons** valent 2 euros, combien valent **8 bonbons**?

Sachant que **4 bonbons** valent **2 euros**, combien valent 8 bonbons?

Sachant que 4 bonbons valent 2 euros,  
combien valent 8 bonbons?

Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros,  
combien valent 8 bonbons?

Sachant que 4 bonbons valent 2 euros,  
combien valent 14 bonbons?

Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros,  
combien valent 14 bonbons?

Sachant que 4 bonbons valent 2 euros,  
combien valent 8 bonbons?

**rapport interne**  
**rapport externe**

Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros,  
combien valent 8 bonbons?

→ Utilisation des propriétés de l'élément

**rapport interne**  
**rapport externe**

Sachant que 4 bonbons valent 2 euros,  
combien valent 14 bonbons?

→ Utilisation du coefficient de proportionnalité

**rapport interne**  
**rapport externe**

Sachant que 4 bonbons valent 2,42 euros,  
combien valent 14 bonbons?

**rapport interne**  
**rapport externe**

Pourquoi changer de  
procédure ?

Relation entre les  
nombres (variable  
didactique fondamentale)

Savoir faire « parler les  
nombres »

Nombres entiers

Nombres décimaux

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros,  
combien valent 14 bonbons ?

# L'énoncé Et le choix de la situation



Vendus à l'unité  
Au même tarif

Sachant que 4 bonbons valent 2 euros,  
combien valent 14 bonbons?

Introduction d'un troisième  
couple de données

Repérer des régularités  
Tester des hypothèses de modèle  
Diversifier les procédures

Sachant que 4 bonbons valent 2 euros et  
que 6 bonbons valent 3 euros,  
combien valent 14 bonbons?

# 1- Choix d'une situation de proportionnalité

## Modéliser

- utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne ;
- reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité ;

## Proportionnalité

Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée : propriétés de linéarité (additive et multiplicative), passage à l'unité, coefficient de proportionnalité.

Appliquer un pourcentage.

...une recette de pâte à crêpes ?

# Pâte à crêpes très simple

Dessert - Très facile - Bon marché - Végétarien



 [Alerter !](#)



**Temps de préparation : 10 minutes**

**Temps de cuisson : 15 minutes**

**Ingrédients (pour 15 crêpes) :**

- 2 tasses de farine
- 2 oeufs entier
- 2 paquets de sucre vanillé
- 1 pincée de sel
- 3 tasses de lait (ou eau)

Recette pour 20 crêpes ?



# Pâte à crêpes très simple

Dessert - Très facile - Bon marché - Végétarien



 [Alerter !](#)



**Temps de préparation : 10 minutes**

**Temps de cuisson : 15 minutes**

**Ingrédients (pour 15 crêpes) :**

- 2 tasses de farine
- 2 oeufs entier
- 2 paquets de sucres vanillé
- 1 pincée de sel
- 3 tasses de lait (ou eau)

## **Recette pour 20 crêpes ?**

8/3 de tasses de farine, 8/3 d'œuf, 8/3 de paquets de sucre, 4/3 de pincée de sel, 4 tasses de lait...

Proportionnalité « adaptable »...« interprétable »...

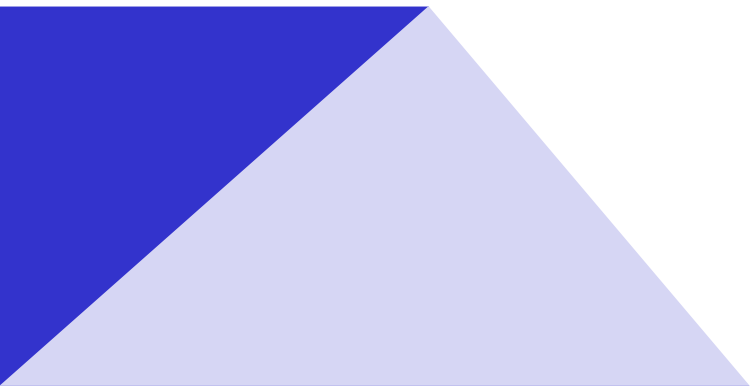
# 1- Choix d'une situation de proportionnalité

Difficulté du rapport entre réalité et modèle



**ATTENTION** aux **implicites** des situations dites « **concrètes** ». Lorsque l'on fait des maths, on se place généralement dans **un cadre idéal** que l'on doit **explicitier** (régulièrement) !

# Les procédures observées chez les élèves



# Procédure experte ou non ?

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.

Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

# Procédure experte ou non ?

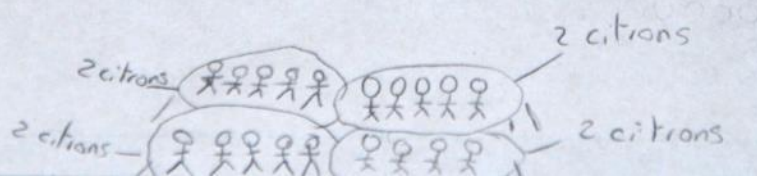
## Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ? Il faut 8 citrons pour 20 personnes.

j'ai fait 4 tables de 5 personnes et j'ai ajouter 2 citrons à une table. Puis j'ai additionner le nombre de citrons.



Propriété additive de la linéarité

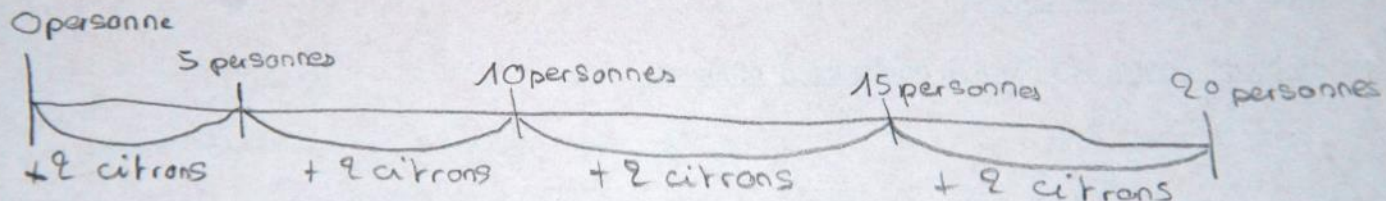
# Procédure experte ou non ?

Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?



$$2 + 2 + 2 + 2 = 8 \text{ citrons.}$$

Il faut 8 citrons pour 20 personnes

Propriété additive de la linéarité



# Procédure experte ou non ?

Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$$\begin{array}{r} \times 2 \\ \hline 4 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 5 \\ \hline 4 \\ 20 \end{array}$$

2 citrons	pour 5 personnes
4 citrons	pour 10 personnes
6 citrons	pour 15 personnes
8 citrons	pour 20 personnes

il faut 8 citrons pour 20 personnes

Procédure mixte :

Propriété additive / multiplicative de la linéarité

# Procédure experte ou non ?

Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

nombre citrons	2	8
nombre personnes	5	20

Handwritten annotations: An arrow labeled  $\times 4$  points from the first column to the second column. Another arrow labeled  $\times 4$  points from the first row to the second row.

Il faudra 8 citrons pour 20 personnes

Propriété multiplicative de la linéarité



# Procédure experte ou non ?

Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$$\begin{array}{r} 20 \\ 4 \overline{) 20} \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

il faut pour 1 personne 20  
4 de citron  $\times 0,4$

$$\begin{array}{r} 80 \\ + 000 \\ \hline 08,0 \end{array}$$

Il faut 8 citrons.

Retour à l'unité

# Procédure experte ou non ?

Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$$20 \times \frac{2}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Il faut 8 citrons pour 20 personnes.

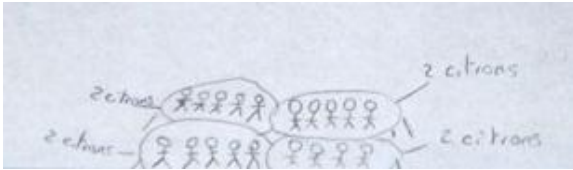
Passage par l'unité ?

Utilisation du coefficient de proportionnalité ?

Produit en croix ?

Attention : Il peut être impossible pour l'enseignant de reconnaître la stratégie utilisée par l'élève si la procédure est uniquement numérique. **Le passage à l'oral pour expliciter une procédure est important.** Il s'agit de mettre des mots sur les actes et d'expliquer les données numériques manipulées avec les unités (« la qualification », C. Houdement).

# Procédure experte ou la plus adaptée?



Handwritten calculation:  $5 \div 0,4 = 12,5$ . The student has written 'il faut pour 1 personne 20 citrons.' and 'il faut 8 citrons.' The calculation shows  $5 \div 0,4 = 12,5$  with a remainder of 0,00.



Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

L'objectif n'est pas, à ce stade, de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de **permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures**, s'appuyant toujours sur **le sens**, parmi lesquelles **il pourra choisir en fonction des nombres en jeu** dans le problème à résoudre.

# Procédure experte ou la plus adaptée?



Résoudre des problèmes  
de proportionnalité au cycle 3

Lors des mises en commun et des corrections collectives, **la comparaison de différentes procédures** doit permettre aux élèves **d'acquérir ces différentes procédures** et de prendre conscience dans un problème, **qu'en fonction des nombres en jeu certaines sont plus efficaces** que d'autres : demandant moins de calculs, ou faisant appel à des calculs plus simples, elles permettent de **gagner en rapidité et de diminuer le risque d'erreurs.**

## **Points d'attention pour enseigner la proportionnalité :**

- La reconnaissance des situations de proportionnalité/non proportionnalité.
- L'enseignement progressif des différentes procédures pour traiter les situations de proportionnalité.
- Les relations entre les nombres, comme variable didactique (*rapport interne/externe*).
- La place de l'étayage, de la différenciation...



## Problèmes CM1 / CM2 – Module de formation sur l'enseignement de la proportionnalité

### **Ce qui vous est demandé :**

- Proposer à vos élèves le plus grand nombre possible des problèmes de cette liste, avant le temps 3 de la formation.
- **Renseigner la grille retour** pour les problèmes **A et D**, ainsi que l'activité d'agrandissement (**puzzle**).
- Revenir avec les trois grilles (voir ci-dessus), des productions d'élèves que vous avez choisies pour leur intérêt, des traces écrites de cette séquence sur la proportionnalité (individuelle et/ou collectives). Les photographies sont possibles, si affichage dans la classe.
- ✓ Vous pouvez modifier les énoncés, par exemple, pour différencier.
- ✓ Vous conduisez vos séances comme vous le souhaitez (*ex : propositions d'aides, présentation de l'énoncé, etc.*)
- ✓ Les problèmes sont donnés dans un ordre aléatoire, vous pouvez choisir l'ordre dans lequel vous allez les proposer à vos élèves.

# Vers le temps 2 de la formation

**A/** Dans le livre de recettes de cuisine de Coréentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

<b>Pour 15 crêpes</b>	<b>Pour 25 crêpes</b>
300 g de farine	500 g de farine
3 œufs	5 œufs
75 cL de lait	125 cL de lait
3 cuillères à soupe d'huile	5 cuillères à soupe d'huile

Mais Coréentin veut faire 10 crêpes seulement.  
Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes ?

**D/** Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boîte une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant, pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g.

Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

**H/** Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

**F/** Plusieurs enfants jouent avec des Kapla, c'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques.

Alex a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.

- Emma a empilé 100 planchettes ;
- Léo a empilé 5 planchettes ;
- Zoé a empilé 17 planchettes.

Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?



# Vers le temps 2 de la formation

## Grille de retour pour les problèmes.

### Problème N°:

*Pour rappel vous devez compléter une fiche par problème. Si besoin, pour vous aider vous pouvez vous référer à la grille «[Retour sur pratique](#)».*

1/ **Avant la séance**: Ce que j'anticipe / Ce que je prévois (analyse du pb, adaptation, différenciation, organisation...)

Sélectionner la ligne du tableau

2/ **Pendant la séance**: Ce que j'ai observé et/ou intervention de l'enseignant (étayage/différenciation...)

3/ **Après la séance**: ce que j'ai analysé.

# Vers le temps 2 de la formation

**Analyse des productions des élèves et du rôle du maître.**

**Procédures utilisées / Procédure majoritairement utilisée:**

|

**Usage du schéma:** (oui/non – utile/inutile – Pour représenter quoi? - etc.)

**Place de la manipulation?**

**Réussites et progrès:**

**Erreurs et difficultés:**

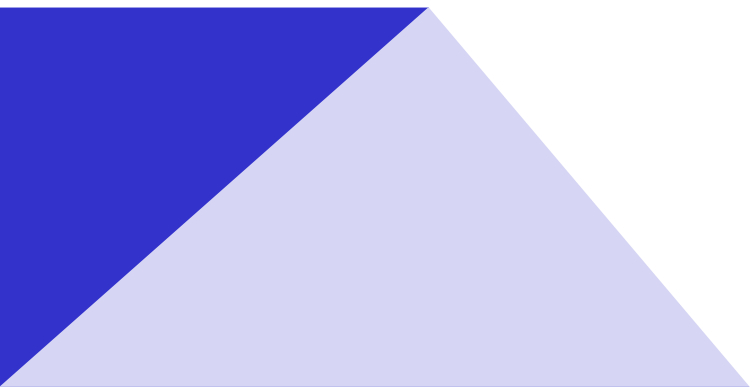
**Etayage/différenciation:**



# Partie 3

Activités  
délivrance  
Progressions  
Réussite

Quelle progressivité au cours  
du cycle 3 ?



# 3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.

On connaît la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Début CM1

Linéarité somme et différence

Quelle est la masse de 8 billes ? de 2 billes ?

### 3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.

On connaît la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Fin CM1

Linéarité somme / différence / double et mixte (facile à identifier)

Quelle est la masse de 6 billes ? de 10 billes ?  
de 13 billes ? de 7 billes ?

## Problèmes relevant de la proportionnalité

Le recours aux propriétés de linéarité (multiplicative et additive) est privilégié. Ces

propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples verbalisés

(« Si j'ai deux fois, trois fois... plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois... plus d'ingrédients » ;

« Je dispose de briques de masses identiques. Si je connais la masse de 7 briques et celle de 3 briques alors je peux connaître la masse de 10 briques en faisant la somme des deux masses »).

Dès la **période 1**, des situations de proportionnalité peuvent être proposées (recettes...).

L'institutionnalisation des propriétés se fait progressivement à partir de la **période 2**.



# ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE

## NOMBRES ET CALCULS

• Ce que sait faire l'élève      ♦ Type d'exercice      ▪ Exemple d'énoncé      *Indication générale*

### **Ce que sait faire l'élève de CM1**

#### ***Problèmes relevant de la proportionnalité***

- Dans chacun des trois domaines « nombres et calculs », « grandeurs et mesures » et « espace et géométrie » des problèmes relevant de la proportionnalité sont proposés à l'élève.
- Il mobilise pour les traiter des formes de raisonnement spécifiques et des procédures adaptées, comme les propriétés de linéarité (additive et multiplicative).

# ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE

## NOMBRES ET CALCULS

- Ce que sait faire l'élève
- ♦ Type d'exercice
- Exemple d'énoncé
- Indication générale*

### Exemples de réussite

#### ***Problèmes relevant de la proportionnalité***

- Indique si les affirmations sont vraies ou fausses. Justifie ta réponse.
  - Si Max mesure 1 m 10 cm à 9 ans, il mesurera 2 m 20 cm à 18 ans.
  - Si je prends 5 litres d'essence, je paie 8€. Si je prends 15 litres, je paierai 24 €.
  - Si 4 billes identiques pèsent 20 g, que 8 billes pèsent 40 g alors 2 billes pèsent 10 g.
- Sachant qu'une bouteille coûte 2€, complète le tableau suivant :

Nombre de bouteilles achetées	2	4	6	8	10	12	15	20	30	50
Prix payé										

- ♦ Il résout des situations de type : « si j'ai deux fois, trois fois... plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois... plus d'ingrédients » ; « je dispose de briques de masses identiques. Si 10 briques pèsent 5 kg, combien pèsent 25 briques ? »

# 3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.

On connaît la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Début CM2

linéarité somme / différence / multiple / diviseur /  
mixte

Quelle est la masse de 21 billes ? de 28 billes ?  
de 500 billes ? de 250 billes ? 125 billes ?

### 3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.

On connaît la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Fin CM2

linéarité et passage à l'unité

Quelle est la masse de 20 billes ? de 21 billes ?  
de 1 bille ? de 87 billes ?

## Problèmes relevant de la proportionnalité

Dès la période 1, le passage par l'unité vient enrichir la palette des procédures utilisées lorsque cela s'avère pertinent.

À partir de la période 3, le symbole % est introduit dans des cas simples, en lien avec les fractions d'une quantité (50 % pour la moitié ; 25 % pour le quart ; 75 % pour les trois quarts ; 10 % pour le dixième).

## La proportionnalité

Les élèves agrandissent ou réduisent une figure dans un rapport simple donné (par exemple  $\times \frac{1}{2}$ ,  $\times 2$ ,  $\times 3$ ).

Les élèves agrandissent ou réduisent une figure dans un rapport plus complexe qu'au CM2 (par exemple  $\frac{3}{2}$  ou  $\frac{3}{4}$ ); ils reproduisent une figure à une échelle donnée et complètent un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée à partir de la connaissance d'une des mesures agrandie ou réduite.

Les élèves agrandissent ou réduisent une figure dans un rapport simple donné (par exemple  $\times \frac{1}{2}$ ,  $\times 2$ ,  $\times 3$ ).

# ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE

---

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul

**Ce que sait faire l'élève**

## ***Problèmes relevant de la proportionnalité***

- Dans chacun des trois domaines « nombres et calculs », « grandeurs et mesures » et « espace et géométrie » des problèmes relevant de la proportionnalité sont proposés à l'élève.
- Il mobilise pour les traiter des formes de raisonnement spécifiques et des procédures adaptées : les propriétés de linéarité (additive et multiplicative), le passage à l'unité, le coefficient de proportionnalité.

# ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE

---

## Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul

### Exemples de réussite

#### *Problèmes relevant de la proportionnalité*

- Indique si les affirmations sont vraies ou fausses. Justifie ta réponse.
  - Quand je monte 5 marches, je m'élève de 100 cm, donc si je monte 10 marches, je m'élève de 2 m.
  - Quand je monte 5 marches, je m'élève de 100 cm, donc si je monte 8 marches, je m'élève de 160 cm.
  - Si Max pèse 30 kg à 10 ans, il pèsera 60 kg à 20 ans.
  - Si je prends 5 litres d'essence, je paie 8 €, donc si je prends 15 litres, je paierai 24 €.
  - Si 4 billes identiques pèsent 20 g, que 8 billes pèsent 40 g, alors 2 billes pèsent 10 g.  
*On peut donner (ou non) des informations supplémentaires (exemple : les marches sont identiques)*
- Au marché, un kilogramme de fraises vaut 12 €. Combien valent alors :  
500 g de fraises ? 200 g de fraises ? 2 kg 250 g de fraises ?
- La recette pour un dessert au chocolat nécessite pour 4 personnes :  
100 g de sucre, 60 g de chocolat, 1 litre de lait.  
Quelle quantité de chaque ingrédient faudrait-il pour confectionner ce dessert pour :  
6 personnes ? 5 personnes ?



### 3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.

On connaît la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Début 6°

linéarité / passage à l'unité et coefficient de proportionnalité

A l'aide du tableur, donner la masse de tous les paquets de moins de 180 billes.

### 3- Repères de progressivité dans les procédures attendues

On dispose d'un sac de billes identiques.

On connaît la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g)

Fin 6°

linéarité / passage à l'unité / coefficient de proportionnalité / tableau de proportionnalité

Résumer sous forme de tableau la situation de la masse des billes en sachant faire apparaître les opérations de linéarité et le coefficient de proportionnalité.

## Problèmes relevant de la proportionnalité

Tout au long de l'année, les procédures déjà étudiées en CM sont remobilisées et enrichies par l'utilisation explicite du coefficient de proportionnalité lorsque cela s'avère pertinent.

Dès la période 2, en relation avec le travail effectué en CM, les élèves appliquent un pourcentage simple (*en relation avec les fractions simples de quantité : 10 %, 25 %, 50 %, 75 %*).

Dès la période 3, ils apprennent à appliquer un pourcentage dans des registres variés.

## Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul

### Ce que sait faire l'élève

- Il résout des problèmes relevant des structures additives et multiplicatives en mobilisant une ou plusieurs étapes de raisonnement.
- Il collecte les informations utiles à la résolution d'un problème à partir de supports variés, les exploite et les organise en produisant des tableaux à double entrée, des diagrammes circulaires, semi-circulaires, en bâtons ou des graphiques.
- Il remobilise les procédures déjà étudiées pour résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et les enrichit par l'utilisation du coefficient de proportionnalité.
- Il sait appliquer un pourcentage.

---

## Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul

- Voici la recette de la pâte à crêpes. Ingrédients pour 4 personnes :

200 g de farine ; 4 œufs ; trois quarts de litre de lait ; 40 g de beurre ; 2 cuillerées à soupe de sucre.
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

- Quelle quantité de farine est nécessaire pour 12 personnes ?
  - Pour 6 personnes, combien faut-il de cuillerées de sucre ?
  - Quelle quantité de beurre faut-il prévoir pour 7 personnes ?
  - Quelle quantité de lait faut-il prévoir pour 12 personnes ?
- ◆ L'élève sait exprimer un coefficient de proportionnalité sous la forme d'une fraction. Exemple :

Longueur du côté d'un carré avant agrandissement (cm)	3
Longueur du côté d'un carré après agrandissement (cm)	7

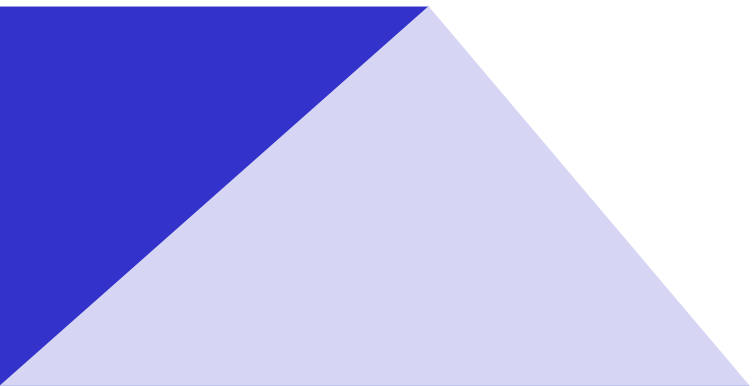
## La proportionnalité

Les élèves agrandissent ou réduisent une figure dans un rapport simple donné (par exemple  $\times \frac{1}{2}$ ,  $\times 2$ ,  $\times 3$ ).

Les élèves agrandissent ou réduisent une figure dans un rapport plus complexe qu'au CM2 (par exemple  $\frac{3}{2}$  ou  $\frac{3}{4}$ ); ils reproduisent une figure à une échelle donnée et complètent un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée à partir de la connaissance d'une des mesures agrandie ou réduite.

Les élèves agrandissent ou réduisent une figure dans un rapport plus complexe qu'au CM2 (par exemple  $\frac{3}{2}$  ou  $\frac{3}{4}$ ); ils reproduisent une figure à une échelle donnée et complètent un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée à partir de la connaissance d'une des mesures agrandie ou réduite.

# Recensement des erreurs les plus fréquentes



# Persistance du modèle additif

Problème 1 :

Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain.  
Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?



## Persistance du modèle additif

Problème 1 :

Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain.  
Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$1,60 + 4 = 5,60$   
pour 6 baguette il faudra 5 € et 60 centime

Pour 4 baguettes de PLUS on paye 4 euros de PLUS !

→ Introduction d'un troisième couple de données.

## Non prise en compte du passage à l'unité

Problème 1 :

Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain.  
Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$$\begin{array}{r} \cancel{1} \text{,} 60 \\ \times \quad 6 \\ \hline 9,60 \end{array}$$

Le prix de 6 baguettes  
s'est 9,60€

→ Dans l'énoncé : « deux baguettes » ou « 2 baguettes » ?

## Choix de la procédure

Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

Personne	5	20
nombre de citrons	2	

Handwritten annotations: A circle with "x2.5" has an arrow pointing to the "Personne" row. Another circle with "x2.5" has an arrow pointing to the "nombre de citrons" row. To the right, there are two large, messy white scribbles, one of which has a "5" written on it.

Attention à ne pas « formaliser » trop tôt !

## Mauvaise utilisation du signe « = »

Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.  
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$2 = 5$   
 $4 = 10$   
 $8 = 15$   
 $12 = 20$  Pour 20 personnes il faut 12 citrons

→ Voir le document « calcul en ligne au cycle 3 » pour le statut du signe « = »



## Difficulté à travailler avec les décimaux

Problème 4 :

Le train roule à la vitesse moyenne de 120 km par heure.  
Combien de kilomètres le train parcourt-il en deux heures et demie ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

$120 \times 2 = 140$   
Le train roulera à 140,5 kilomètre en deux heures et demie.

→ L'élève se sécurise avec le modèle additif dès que la nature des nombres utilisés se complique ! L'oral doit permettre de prévenir ce genre d'erreur.

# Confusion entre « vitesse instantanée » et « vitesse moyenne »

Problème 4 :

Le train roule à la vitesse moyenne de 120 km par heure.  
Combien de kilomètres le train parcourt-il en deux heures et demie ?

Peut-on trouver la réponse ? Non.

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?  
Parcequ'il peut s'arrêter et rouler moins vite.

→ notion de vitesse « constante »

## Effet de contrat : les énoncés typés « proportionnalité »

Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.  
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

Oui

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 2 \\ \hline 220 \end{array}$$

Il fera 220 centimètres

→ Confronter proportionnalité, non proportionnalité et proportionnalité « partielle »

→ Attention à la structure des énoncés

## Énoncé « concret »...réponse « concrète »

Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.  
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

On ne peut pas savoir c'est trop compliqué il faut être scientifique pour le savoir ou il faut attendre que Théo est 10ans

→ Argumentation qui sort du cadre mathématique souhaité (problème de la modélisation)



Un tableau ne fait pas la proportionnalité.

Problème 7 :

Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ?  
Justifie ta réponse.

Oui car c'est un tableau de proportionnalité.

# Confusion entre « croissance » et « proportionnalité ».

## Problème 7 :

Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ?  
Justifie ta réponse.

Oui car si le nombre de Km augmente le nombre de min aussi.

→ confrontation avec des cadres du type âge – taille

# Situation proportionnelle et modélisation



# 1- Reconnaissance de situations de proportionnalité

Reconnaître une situation de proportionnalité et le justifier est déjà tout un problème...il est plus facile de justifier qu'une situation n'est pas de proportionnalité !

On reconnaît des situations de proportionnalité par confrontation à des situations de non-proportionnalité.

# Exemple

Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.  
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

~~OUI~~ il fera  $2 \times 110 = 220$  centimètres ce qui est 2m20cm  
NON <sup>pas</sup> ce n'est pas possible

Une situation qui n'est pas modélisable avec la proportionnalité devrait être justifiée en insistant sur l'oral (raisonnement par l'absurde).

Si cette situation était « de proportionnalité » quelle serait la taille de Théo à 50 ans ? À sa naissance ?

## 2- Résolution de problème...et proportionnalité

Chercher

Modéliser

Représenter

Raisonner

Calculer

Communiquer

+ Manipuler (tout en sachant que faire des mathématiques c'est arriver à se passer (dépasser) de la manipulation)

# Un problème de modélisation

« La botte du Géant »



Quelle est la taille du Géant ?



Le pied du bonhomme fait 1 cm et le pied du géant 10 cm alors on peut dire que le bonhomme est 10 fois plus petit et que le géant est 10 fois plus grand que le bonhomme. ( $180 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 1800 \text{ cm}$ )

Le géant a la même proportion que nous.

180 cm est la taille moyenne d'un homme.

Le géant mesure 18 m

- Chercher
- Modéliser
- Raisonner
- Calculer
- Communiquer





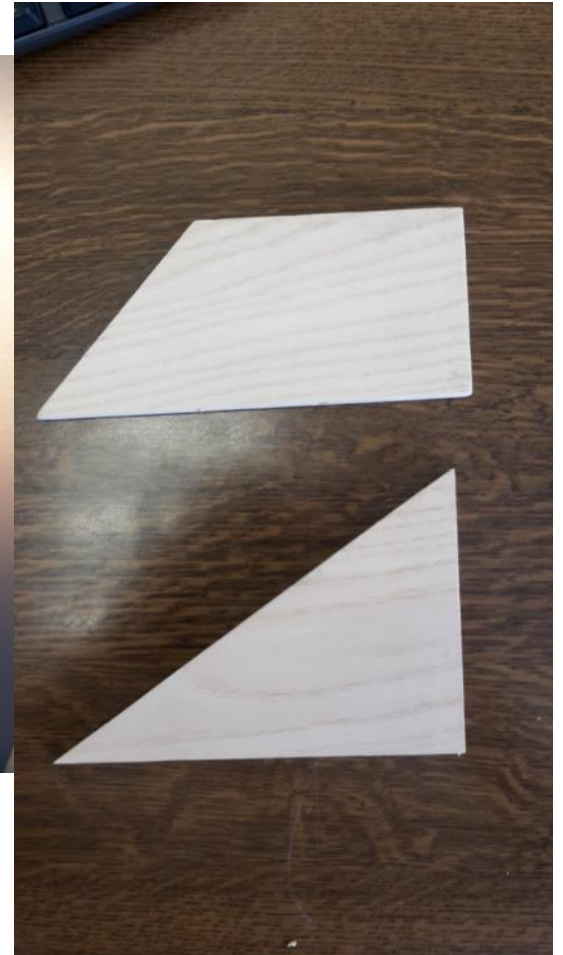
# Un problème de recherche d'indice

« Capacité du réservoir ? »



# Un problème de géométrie / technologie

« Dessine l'ombre ? »



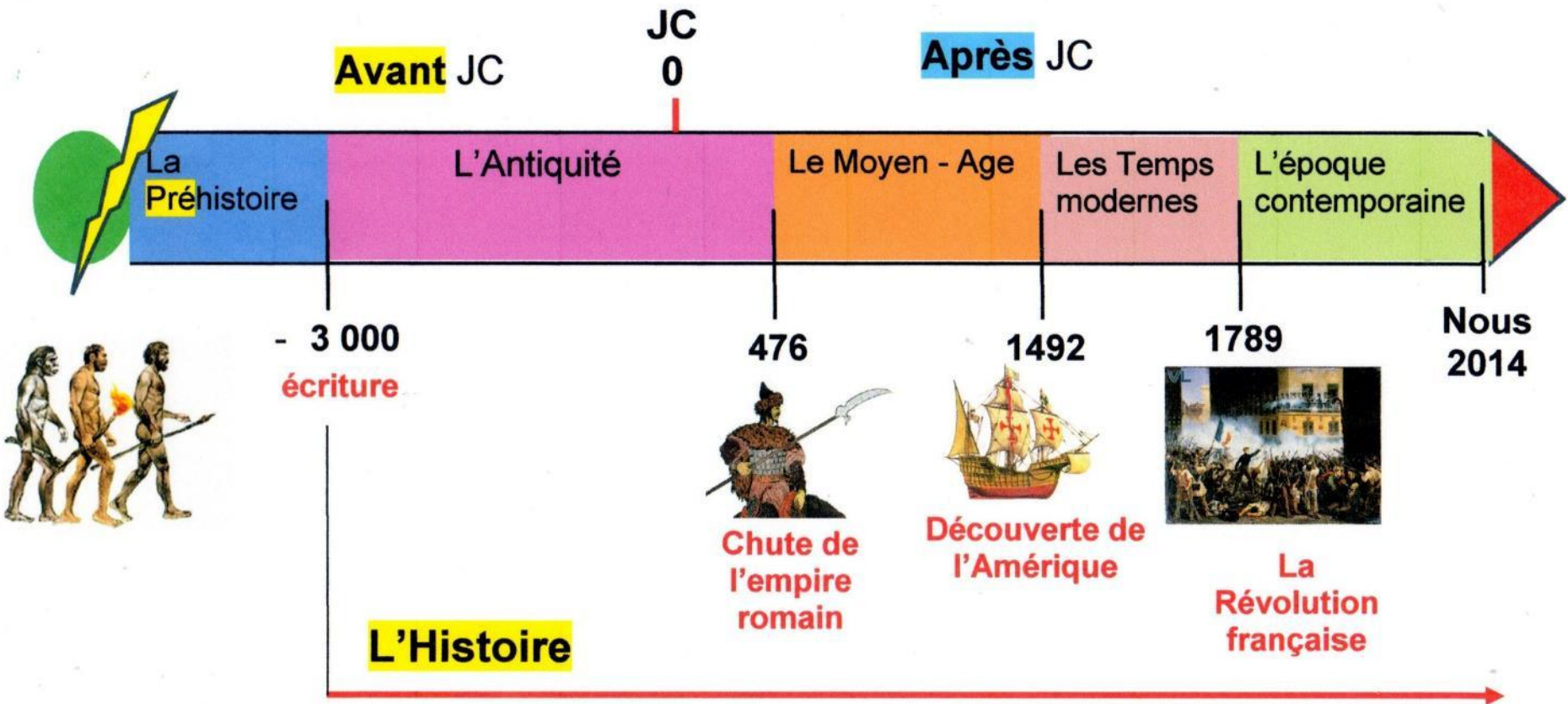
# Estimer un grand nombre

« Combien de coquillettes dans un paquet de 500 g ? »



# Histoire et frise

« Longueur d'une frise ? »



# Conclusion

Quelques points essentiels pour l'enseignement de la proportionnalité :

- Notion à développer sur le long terme (cycle 2 – cycle 3 – cycle 4)
- Progressivité dans les procédures attendues (linéarité puis passage à l'unité puis coefficient de proportionnalité)
- Jouer sur les variables « numériques » (taille des nombres / rapport interne / rapport externe / nature des nombres)
- Insister sur l'oral (explicitation et confrontation)
- Multiplier les contextes (vie courante et problèmes mathématiques)
- Jouer sur l'interdisciplinarité (EPS, géographie, histoire, sciences, technologie...)
- Confronter proportionnalité, non proportionnalité et proportionnalité « partielle »
- Impliquer les élèves (vie de tous les jours)
- Résoudre des problèmes « concrets »
- Introduire les tableaux lorsque la notion a un sens

# Auto évaluation

Cette formation était censée vous permettre de consolider des savoirs et préciser des gestes professionnels :

- Savoir reconnaître une situation de proportionnalité
- Distinguer et utiliser différentes procédures de résolution
- Savoir établir une progression dans les apprentissages
- Utiliser des variables didactiques
- Analyser les erreurs des élèves
- Produire des étayages adaptés

# Ressources

- Boissard D, Houdebine J, Julo J, Kerboeuf MP, Merri M, *La proportionnalité et ses problèmes*, Hachette Education, 1994.
- Bonnet N, *La proportionnalité sans problème*, SCEREN, 2011.
- Comin E, Des graines et des souris, *Grand N*, n°72, 2003.
- ERMEL, *Apprentissages numériques CM1 et CM2*, Hatier Pédagogie.
- Houdement C, Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques à l'école primaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol 16. p 67-96, 2011.
- Ressource pour les classes du collège, proportionnalité, Eduscol, 2005.
- Simard A, Reconnaissance de situations de proportionnalité, *Grand N*, n°90, 2012.
- Simard ., Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique, *Petit x*, n°89, 2012.
- Simard A, Proportionnalité en CM2 – 6°, *Petit x*, n°90, 2012
- [Eduscol](#)

**MERCI de votre Attention**

